Stokes方程推导

四场问题表述

1.1原始控制方程 (不可压缩牛顿流体稳态流动):

- 平衡方程:

- 本构方程:

- 协调方程:

- 不可压缩条件:

其中：

- 为速度场

- (对称梯度算子)

-: 粘性系数，: 压力（拉格朗日乘子)

## 1.2. 动量守恒方程推导

**平衡方程**

​**来源**: 牛顿第二定律（动量守恒）的稳态形式

​**推导**:  
原动量方程：  
稳态时 ，惯性项消失，简化为

## 1.3. 牛顿流体本构方程推导

本构方程:

**来源**: 牛顿流体假设（应力与应变率线性关系）。

**推导**:

应力分解为偏应力  和压力 ，即

牛顿流体假设：（为粘度，为应变率张量）。

合并得

## 1.4. 应变率定义推导

协调方程:

**来源**: 速度梯度分解为对称部分（应变率）和反对称部分（刚体转动）。

**推导**:

速度梯度分解为对称部分 和反对称部分：

仅对称部分 贡献应力。

## 1.5. 不可压缩条件推导

不可压缩条件:

**来源:** 质量守恒方程（连续方程）。

**推导**:

连续方程：。

密度恒定 为常数时 。

方程简化：四场 → 两场

消去 和 的关键步骤：

1. 代入本构方程到平衡方程：

2. 展开散度运算：

3. 利用对称梯度特性：

最终得到两场问题：

-

-

7. 定义能量泛函

简单推导

8. 变分原理推导

步骤 1：定义约束泛函

引入拉格朗日乘子 处理不可压缩条件：

步骤 2：取一阶变分

对 和 分别取变分 和 ：

-

9. 鞍点问题与离散化

弱形式可以写成以下鞍点问题：

-

-

其中

-

-

-

离散化后得到线性代数系统：

10. 结论

- 从物理守恒定律出发，我们推导出不可压缩牛顿流体的四场形式：

- 消去应变率与应力场后，可得经典的 (u, p) 形式：

- 进一步通过能量泛函取变分得到弱形式，离散化后形成典型的鞍点矩阵系统，可用数值方法求解。